Задача 1

Условие

Доказать, что $\mathbb{E}|\xi - a| \geq \mathbb{E}|\xi - med\xi|$ для $\forall a \in \mathbb{R}$ и для любой случайной величины ξ с конечным математическим ожиданием.

Решение

Решение из учебника: Королев В.Ю. «Теория вероятностей и математическая статистика»(стр. 43)

Докажем, что $\mathbb{E}|\xi - med\xi| \leq \mathbb{E}|\xi - a|$

- Рассмотрим случай $a > med\xi$. Тогда

$$|\xi - a| - |\xi - med\xi| = \begin{cases} med\xi - a & \xi \in [a, \infty) \\ a + med\xi - 2\xi & \xi \in (med\xi, a) \\ a - med\xi & \xi \in (-\infty, med\xi] \end{cases}.$$

Так как $a + med\xi - 2\xi > med\xi - a$ при $med\xi < \xi < a$, то

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|\xi - a| - \mathbb{E}|\xi - med\xi| = \mathbb{E}[|\xi - a| - |\xi - med\xi|] \geq \\ &\geq (med\xi - a)\mathbb{E}\mathbb{1}_{[a,\infty)}(\xi) + (med\xi - a)\mathbb{E}\mathbb{1}_{(med\xi,a)}(\xi) + (a - med\xi)\mathbb{E}\mathbb{1}_{(-\infty,med\xi]}(\xi) = \\ &= (med\xi - a)P(\xi \geq a) + (med\xi - a)P(med\xi < \xi < a) + (a - med\xi)P(\xi \leq med\xi) = \\ &= (a - med\xi)[P(\xi \leq med\xi) - P(\xi > med\xi)] \geq 0 \end{aligned}.$$

Последнее неравенство вытекает из определения медианы.

- Случай $a < med\xi$ рассматривается аналогично.

2 R_ξ – интерквартильный размах сл.в ξ с конечн. вторым моментом, $D\xi = \sigma^2$. Док-ть $R_\xi \le 4\sigma$.

□ $R_\xi = \ell(3/4) - \ell(1/4)$

$P(\xi \le \ell(q)) \ge q$
$P(\xi \ge \ell(q)) \ge 1-q$

Рассмотрим нер-во Чебышева

$$P(|\xi - \mathbb{E}\xi| \le \varepsilon) \ge 1 - \frac{D\xi}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Выберем ε т.ч. $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(\mathbb{E}\xi - \varepsilon \le \xi \le \mathbb{E}\xi + \varepsilon) \ge 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$\varepsilon = 2\sigma$
$2\varepsilon = 4\sigma$

длина интервала 2ε и равна 4σ.

Покажем, что $\ell(1/4)$ и $\ell(3/4)$ лежат внутри этого интервала.

попасть сюда больше $3/4$
тогда вне этого интервала меньше $1/4$

• $P(\xi < \mathbb{E}\xi - \varepsilon) < 1 - 3/4 = \frac{1}{4} \Rightarrow$ $\mathbb{E}\xi - \varepsilon$ $\mathbb{E}\xi - \varepsilon$

если $\ell(1/4) < \mathbb{E}\xi - \varepsilon$, то $P(\xi \le \ell(\frac{1}{4})) \le \frac{1}{4}$, но по опред квартили $\ell(\frac{1}{4})$:

$P(\xi \le \ell(\frac{1}{4})) \ge \frac{1}{4}$ (?!)

$$\Longrightarrow \ell(\tfrac{1}{4}) \ge \mathbb{E}\xi - \varepsilon$$

• Или $P(\xi > \mathbb{E}\xi + \varepsilon) < 1 - 3/4 = 1/4 \Rightarrow$
если $\ell(3/4) > \mathbb{E}\xi + \varepsilon$, то $P(\xi \ge \ell(3/4)) \le \frac{1}{4}$, но по опред квартили $\ell(3/4)$:

$P(\xi \ge \ell(3/4)) \ge \frac{1}{4}$ (?!)

$$\Longrightarrow \ell(3/4) \le \mathbb{E}\xi + \varepsilon$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}\xi - \varepsilon$ $\ell(1/4)$ $\ell(3/4)$ $\mathbb{E}\xi + \varepsilon$ $\Longrightarrow 2\varepsilon = 4\sigma \ge \ell(3/4) - \ell(1/4) = R_\xi$

$$\boxed{4\sigma \ge R_\xi}$$ ■

Задача 3

Условие

Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots$ - случайные величины. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда. когда

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} = 0\,.$$

Решение

Необходимость:

$$\mathbb{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} d\,\Phi_n(x) \geq \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) - \int\limits_{|x|<\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \geq \int \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n$$

Следовательно

$$0 \leq \mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2} \leq \varepsilon^2 + \mathbb{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon)$$

Достаточность:

$$\mathbb{P}(|\xi_n| \geq \varepsilon) = \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} d\,\Phi_n(x) \leq \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{x^2}{1+x^2} d\Phi_n(x) \leq \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \mathbb{E}\frac{\xi_n^2}{1+\xi_n^2}$$

(4) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – н.о.р.с.в., имеющие распр Коши.
Док-ть, что $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_j \overset{d}{=} \xi_1$

$\square$ $f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|}$

$S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$

$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = \mathbb{E}\, e^{it\frac{S_n}{n}} = \mathbb{E}\, e^{i\frac{t}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)} = \left(f\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$

$= \left(e^{-\frac{|t|}{n}}\right)^n = e^{-|t|} = f_{\xi_1}(t) = e^{-|t|} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ распред $\frac{S_n}{n}$ и ξ_1 также равны

$\blacksquare$

5 Рассмотрим $\mathbb{P}(|X_k - a_k| > \varepsilon B_n) \cdot \varepsilon^2 B_n^2 = \varepsilon^2 B_n \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} dF_k(x) =$

$$= \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} \varepsilon^2 B_n^2 \, dF_k(x) \le \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} |x-a_k|^2 \, dF_k(x)$$

$$\mathbb{P}(|X_k - a_k| > \varepsilon B_n) \le \frac{1}{B_n^2 \varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k|>\varepsilon B_n} |x-a_k|^2 \, dF_k(x) \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ условие равном. пред. малости (следует из условия Линдеберга).

Задача 6

Условие

Доказать, что из условия Ляпунова вытекает условие Линдеберга.

Решение

Теорема 4. (Ляпунова) Если для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ можно подобрать такое $\delta > 0$, что

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} P(\eta_n < x) = F(x)$.

при использовании того, что область интегрирования определяется неравенством

$$\frac{|x-a_k|}{\tau B_n} \geq 1$$

и поэтому при любом $\delta > 0$

$$\frac{|x-a_k|^\delta}{\tau^\delta B_n^\delta} \geq 1.$$

$$\frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k| \geq \tau B_n} (x-a_k)^2 dF_{\xi_k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{B_n^2 (\tau B_n)^\delta} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-a_k| \geq \tau B_n} (x-a_k)^{2+\delta} dF_{\xi_k}(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x-a_k|^{2+\delta} dF_{\xi_k}(x) =$$

$$= \frac{1}{\tau^\delta B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\xi_k - a_k|^{2+\delta} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \quad \forall \tau > 0$$

Что означает выполнение условия Линдеберга.

Задача 7

Условие

Доказать, что сходимость функции распределения в центральной предельной теореме равномерная.

Решение

Пусть $F_n \Rightarrow F$ и $F(x)$ непрерывна, тогда $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|F_n(x)-F(x)| \to 0, n\to\infty$.

$\forall\varepsilon>0$ возьмем $m>\frac{1}{\varepsilon}$

В силу непрерывности $F(x)$ существуют $x_1,\ldots,x_n: F(x_i)=\frac{i}{m}$ и $|F_n(x_i)-F(x_i)|<\varepsilon$ для достаточно большого n.

Тогда $\forall x\in[x_k,x_{k+1}] (x_0=-\infty, x_m=\infty)$

$$F_n(x)-F(x)\le F_n(x_{k+1})-F(x_k)\le F(x_{k+1})-F(x_k)+\varepsilon=\varepsilon+\frac{1}{m}<2\varepsilon$$

$$F(x)-F_n(x)\le F(x_{k+1})-F_n(x_k)\le F(x_{k+1})-F(x_k)+\varepsilon=\varepsilon+\frac{1}{m}<2\varepsilon$$

Следовательно $|F_n(x)-F(x)|<2\varepsilon, \forall x\in\mathbb{R}$.

8 $\exists$ $\Phi(x)$ – станд. норм. ф-я распределения,
$\varphi(x)$ – соот-ая плотность

Док-ть $\quad \varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) \underset{(2)}{\leq} 1-\Phi(x) \underset{(1)}{\leq} \frac{\varphi(x)}{x}, \; x>0$

1) $\square$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{x}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{y^2}\right\}}_{f(x)} dy \quad (*)$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{-\frac{2x}{2x} - \frac{1}{x^2}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{x^2}\right\} = -f(x)$$

$$\int\limits_x^{\infty} F'(y)\,dy = \int\limits_x^{\infty} -f(y)\,dy \Rightarrow -F(x) = -\int\limits_x^{\infty} f(y)\,dy$$

$\Rightarrow$ (*) верно.

$$\Rightarrow \quad 1-\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1+\frac{1}{y^2}\right\} dy = \frac{\varphi(x)}{x} \quad \blacksquare$$

2) $\square$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right\}}_{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} \underbrace{e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1-\frac{3}{y^4}\right\}}_{f(x)} dy$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left\{-\frac{2x}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (**)$$

$$\cdot \left\{-1 + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \cancel{\frac{1}{x^2}} + \frac{3}{x^4}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 - \frac{3}{x^4}\right) = -f(x)$$

$$\int\limits_x^{\infty} F'(y)\,dy \int\limits_x^{\infty} -f(y)\,dy = -F(x) = -\int\limits_x^{\infty} f(y)\,dy \Rightarrow (**) \text{ верно}$$

$$\varphi(x)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_x^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \left\{1-\frac{3}{y^4}\right\} \leq 1-\Phi(x). \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ двойное нер-во доказано.

Задача 9

Условие

Какова скорость сходимости в теореме Муавра-Лапласа.

Решение

По неравенству Берри-Эссена:

$\sup\limits_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - p) < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{L_n^3 * C}{\sqrt{n}}$, где $L_n^3 = \frac{\mathbb{E}|X_1 - p|^3}{\sqrt{(p(1-p))^3}}$,а C - некоторое число между $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ и 0.8, независящее от распределения.

$\mathbb{E}|X_1 - p|^3 = p^3(1-p) + p(1-p)^3 = (1-p)p(1-2p+2p^2)$, следовательно $L_n^3 = \frac{(1-p)p(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{(1-2p+2p^2)}{\sqrt{p(1-p)}}$

Найдем максимум L_n^3:

$$(L_n^3)' = \frac{(-2+4p)(p-p^2) - (1-2p)(1-2p+2p^2)}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = \frac{2p-1}{\sqrt{(p(1-p))^3}} = 0 \;\Rightarrow\; p = \frac{1}{2} \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow \; L_n^3 \le \frac{1-1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ поэтому:

$$\sup_x \left| P\left(\frac{2}{\sqrt{np(1-p)}} \sum_{i=1}^{n} (X_i - p) < x \right) - \Phi(x) \right| \le \frac{L_n^3 * C}{\sqrt{n}} \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Задача 10

Условие

Пусть ξ_λ - случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

при $\lambda \to \infty$.

Решение

$\mathbb{E}$ распределения пуассона = λ

$$\mathbb{E}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = 1$$

$$\mathbb{D}\frac{\xi_\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda}$$

применим теперь неравенство Чебышева $P(\ |\xi - \mathbb{E}\xi| > \epsilon\ ) < \frac{\mathbb{D}\xi}{\epsilon^2} = \frac{1}{\lambda\epsilon^2}$, но так как у нас по условию λ стремится к бесконечности, то правая часть стремится к нулю

в итоге вероятность того, что случайная величина отличается от своего матожидания (от 1) больше чем на ϵ равна нулю, а значит

$$\frac{\xi_\lambda}{\lambda} \xrightarrow{P} 1$$

Задача 11

Условие

Пусть ξ_λ - случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что

$$P\left(\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}} < x\right) \longrightarrow \Phi(x)$$

при $\lambda \to \infty$.

Решение

Так как характеристическая функция стандартного нормального распределения равна $e^{\frac{-t^2}{2}}$, то, по теореме Леви, о непрерывном соответствии между х.ф и ф.р., достаточно показать, что при каждом фиксированном $t \in \mathbb{R}$

$$f^*_\lambda(t) = \mathbb{E}e^{it\xi^*_\lambda} \to e^{\frac{-t^2}{2}},\ \lambda \to \infty, \text{ где } \xi^*_\lambda = \frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$$

Характеристическая функция распределения Пуассона имеет вид:

$$f_\lambda(t) = \mathbb{E}e^{it\xi_\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!} = \exp(\lambda(e^{it} - 1))$$

Поэтому

$$f^*_\lambda(t) = e^{-it\sqrt{\lambda}} f_\lambda(t\lambda^{-1/2}) = \exp(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(e^{it\lambda^{-1/2}} - 1))$$

Таким образом, раскладывая экспоненту(внутреннюю) в ряд Тейлора, при $\lambda \to \infty$ получим

$$f^*_\lambda(t) = \exp(-it\sqrt{\lambda} + \lambda(it\lambda^{-1/2} + (it)^2(2\lambda)^{-1} + o(t^2\lambda^{-1}))) \to e^{\frac{-t^2}{2}}$$

Задача 12

Условие

Пусть ξ_a - случайная величина, имеющая геометрическое распределение с математическим ожиданием, равным a. Доказать, что

$$\lim_{a\to\infty}\mathbb{P}(a^{-1}\xi_a < x) = 1-e^{-x},\ x>0.$$

Решение

ξ: $P(\xi=k)=p(1-p)^k$.

Надо доказать, что $P\left(\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi} < x\right) = 1 - e^{-x}$, $x>0$;

$$\phi_\xi(t)=\frac{p}{1-qe^{it}}$$

$\lim\limits_{p\to 0}\phi_{\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi}}(t)=\Big\{$Т.к. если $Y=aX$, то $\Phi_Y(t)=\Phi_X(at)$ и для геометрического распределения $\mathbb{E}\xi=\frac{q}{p}\Big\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{1-qe^{\frac{itp}{q}}}=\Big\{$Разложим экспоненту в ряд Тейлора $\Big\}=\lim\limits_{p\to 0}\frac{p}{1-q(1+\frac{itp}{q})}=\frac{1}{1-it}$;

$$Y:\ P(Y<x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

$$\phi_Y(t)=\frac{1}{1-it}$$

Следовательно $\phi_{\frac{\xi}{\mathbb{E}\xi}}(t) \longrightarrow \phi_Y(t),\ p \to 0$. По теореме Леви, о непрерывном соответствии между х.ф и ф.р. получаемм доказательство.

Задача 13

Условие

Что больше: неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями, или неопределенность распределения случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно?

Решение

Энтропия равна $H(X) = -\sum p_i * \log p_i$

Вычислим энтропию распределения случайной величины, принимающей значения 0 и 1 с равными вероятностями:

$$-H(X) \ = \ 0.5 * \log 0.5 + 0.5 * \log 0.5 = \log 0.5$$

Вычислим энтропию случайной величины, принимающей значения -1, 0 и 1 с вероятностями 0.25, 0.5 и 0.25, соответственно:

$$-H(\xi) \ = \ 0.25 * \log 0.25 + 0.5 * \log 0.5 + 0.25 * \log 0.25 = 0.5 * (\log 0.25 + \log 0.5) = 0.5 * \log$$

$$H(\xi) = -1.5 * \log 0.5 > -\log 0.5 = H(X)$$

14

Для любой ли абсолютно непрер. случ. величины существует диф. энтропия?

Ответ: нет.

Контрпример: $p(x) = \begin{cases} \frac{1}{x \ln^2 x}, & x \in [e, +\infty) \\ 0, & x \notin [e, +\infty) \end{cases}$

$$H(X) = -\mathbb{E} \log p(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) \log p(x)\, dx = \left| \begin{matrix} \text{основ} \\ \log \\ \text{берем} \\ \text{равным} \\ e \end{matrix} \right.$$

$$= -\int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \cdot \ln \frac{1}{x \ln^2 x}\, dx =$$

$$= \int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} \left(\ln x + \ln \ln^2 x \right) dx = \left| \begin{matrix} \ln x = y \\ x = e^y \\ dx = e^y dy \end{matrix} \right|$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{\cancel{e^y} y^2} \left(y + \ln y^2 \right) \cdot \cancel{e^y}\, dy = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{y} + \frac{2 \ln y}{y^2} \right) dy$$

$$\cancel{\ln y \Big|_1^{\infty}} + 2 \int_1^{\infty} \frac{\ln y}{y^2}\, dy = \left| \begin{matrix} \ln y = z \\ y = e^z \\ dy = e^z dz \end{matrix} \right|$$

$$= \infty + 2 \int_0^{\infty} \frac{z}{e^{2z}} e^z\, dz = \infty + 2 \int_0^{\infty} z e^{-z}\, dz$$

$$= \infty - \cancel{2 z e^{-z} \Big|_0^{\infty}} - 2 e^{-z} \Big|_0^{\infty} = \infty + 2 = \infty$$

$\Rightarrow$ диф. энтропии нет

Задача 15

Условие

Что больше: дифференциальная энтропия распределения, равномерного на [0, 1], или дифференциальная энтропия показательного распределения с параметром $\lambda = 2$?

Решение

- Вычислим дифференциальную энтропию показательного распределения:

$$H(X) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \log(\lambda e^{-\lambda x})^{-1} dx = -\log\lambda \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx + \lambda \log e \int_0^{+\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \log\lambda e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \lambda \log e \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{-\lambda x} d(\lambda x) & v = -e^{-\lambda x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\log\lambda + \lambda \log e \left(-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx\right) = -\log\lambda - (\log e) e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty} = -\log$$

При $\lambda = 2$ дифференциальная энтропия показательного распределения равна $\log\frac{e}{2}$

- Вычислим дифференциальную энтропию равномерного на [0, 1] распределения. Имеем:

$$p(X) = \begin{cases} 0, & X < 0 \\ 1, & 0 \le X \le 1 \\ 0, & 1 < X \end{cases}$$

$H(X) = \int_0^1 1 \times \log(1) dx = 0$ для любого основания логарифма.

- Если в дифференциальной энтрропии показательного распределения возьмем основание 2, то очевидно, что $\log_2 \frac{e}{2} > 0$

Задача 16

Условие

Вычислить дифференциальную энтропию нормального распределения с параметрами $a \in \mathbb{R}$ и $\sigma^2 > 0$.

Решение

$$H(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= -\log\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx + \frac{\log e}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}dx=\left|\begin{matrix}\frac{x-a}{\sigma} = t\\ dx = \sigma dt\end{matrix}\right| =$$

$$= \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}t^2dt = \left|\begin{matrix}u = t & du = dt\\ dv = te^{-\frac{t^2}{2}}dt & v = -e^{-\frac{t^2}{2}}\end{matrix}\right| = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) +$$

$$=\log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \frac{\log e}{2\sqrt{2\pi}}(0 + \sqrt{2\pi}) = \log(\sigma\sqrt{2\pi}) + \log\sqrt{e} = \log(\sigma\sqrt{2\pi e}).$$

Задача 17

Условие

Пусть $\xi_1, \xi_2, \cdots$ - независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbb{E}\xi_1 = a$ и $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Пусть N - целочисленная положительная случайная величина, независимая от последовательности $\xi_1, \xi_2, \cdots$, и имеющая конечный второй момент. Обозначим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$. Выразить $\mathbb{D}S_N$ через моменты индекса и слагаемых.

Решение

$$\mathbb{D}S_N = \mathbb{E}(S_N - \mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}S_N^2 - (\mathbb{E}S_N)^2 = \mathbb{E}[\mathbb{E}(S_N^2|N)] - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N)^2$$

$$\mathbb{E}(S_N^2|N=n) = \mathbb{E}S_N^2 = \mathbb{D}S_n + (\mathbb{E}S_n)^2 = n\mathbb{D}\xi_1 + n^2(\mathbb{E}\xi_1)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(S_N^2|N) = N\mathbb{D}\xi_1 + N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{D}S_N = \mathbb{E}(N\mathbb{D}\xi_1 + N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2) - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N)^2 = \mathbb{E}N\mathbb{D}\xi_1 + \mathbb{E}N^2(\mathbb{E}\xi_1)^2 - (\mathbb{E}\xi_1)^2(\mathbb{E}N$$

Ответ: $\mathbb{D}S_N = \sigma^2\mathbb{E}N + a^2\mathbb{D}N$

18 X имеет распред Стьюдента с $n=10$

Сравнить коэф эксцесса X и 3

$$\chi_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathbb{D}X)^2} = \frac{\mathbb{E}(X-\mathbb{E}X)^4}{(\mathbb{E}X^2-(\mathbb{E}X)^2)^2} \qquad f_X(x) = \boxed{\frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\sqrt{10\pi}\,\Gamma(5)}}_{A} \cdot \left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\mathbb{E}X = A\int_{-\infty}^{+\infty} x\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-\frac{11}{2}} dx = \left| \begin{array}{l} \text{ф-я подинтегр} \\ \text{нечетная} \end{array} \right| = \boxed{0}$$

$$\mathbb{E}X^2 = A\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\left(1+\frac{x^2}{10}\right)^{-(5+\frac{1}{2})} = 10A\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})} dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \frac{x}{\sqrt{10}} = t \\ dx = \sqrt{10}\,dt \end{array} \right| = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot 2\int_0^{+\infty} t^2(1+t^2)^{-(5+\frac{1}{2})} dt =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t^2 = z \\ 2t\,dt = dz \\ dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}} \end{array} \right| = 10\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot A\int_0^{+\infty} z^{\frac{1}{2}}(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})} dz =$$

$$= 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot B\left(\frac{3}{2},4\right) = 10\cdot\sqrt{10}\cdot A\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{11}{2})}$$

$$= 10\cdot\cancel{\sqrt{10}}\cdot\frac{\cancel{\Gamma(\frac{11}{2})}}{\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{\pi}\,\cancel{\Gamma(5)}}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\cancel{\Gamma(4)}}{\cancel{\Gamma(\frac{11}{2})}} = \frac{10\cdot\frac{1}{2}\cdot\cancel{\sqrt{\pi}}}{4\cancel{\sqrt{\pi}}} = \boxed{\frac{5}{4}}$$

$$\mathbb{E}X^4 = A\int_{-\infty}^{+\infty} x^4\left(1+\left(\frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})} dx = \left|\begin{array}{l}\frac{x}{\sqrt{10}} = t\\ dx = \sqrt{10}\,dt\end{array}\right| = A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot 2\cdot$$

$$\int_0^{+\infty} t^4\left(1+t^2\right)^{-(5+\frac{1}{2})} dt = \left|\begin{array}{l}t^2 = z\\ dt = \frac{dz}{2\sqrt{z}}\end{array}\right| =$$

$$= A\cdot 100\cdot\sqrt{10}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty} z^2(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}\frac{dz}{\sqrt{z}} = 100\cdot\sqrt{10}\cdot A\int_0^{+\infty} z^{\frac{3}{2}}(1+z)^{-(5+\frac{1}{2})}dz$$

$$= 100\cdot\sqrt{10}\cdot A\,B\left(\frac{5}{2},3\right) = 100\cdot\cancel{\sqrt{10}}\cdot\frac{\cancel{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}}{\cancel{\sqrt{10}}\sqrt{\pi}\,\underbrace{\Gamma(5)}_{4\cdot 3}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\cancel{\Gamma(3)}}{\cancel{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{\overset{25}{\cancel{100}}\cdot\cancel{\frac{3}{2}}\cdot\cancel{\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}}{4\cdot\cancel{3}\cancel{\sqrt{\pi}}} = \boxed{\frac{25}{4}}$$

$$\chi_4 = \frac{\mathbb{E}(X-\underbrace{\mathbb{E}X}_{0})^4}{\left[\mathbb{E}X^2-(\underbrace{\mathbb{E}X}_{0})^2\right]^2} = \frac{\mathbb{E}X^4}{\left[\mathbb{E}X^2\right]^2} = \frac{25}{4}\cdot\frac{4^2}{5^2} = 4$$

$4 > 3 \Rightarrow$ $\boxed{\text{коэф эксцесса больше 3}}$

Задача 19

Условие

Пусть $N_1(t)$ - стандартный пуассоновский процесс(с интенсивностью 1). Пусть далее Λ - положительная случайная величина, имеет конечный второй момент и независима от N_1 (t). Выразить $\mathbb{D}N_1(\Lambda)$ через моменты случайной величины Λ.

Решение

$$N(t)=N_1(\Lambda)$$

$$\mathbb{E}N(t)=\int_0^\infty \mathbb{E}N_1\lambda dP(\Lambda<\lambda)=\int_0^\infty \lambda dP(\Lambda<\lambda)=\mathbb{E}\Lambda$$

$$\mathbb{D}N(t)=\mathbb{E}N^2(t)-(\mathbb{E}\Lambda)^2$$

$$\mathbb{D}N_1(\lambda) = \mathbb{E}N_1^2(\lambda)-(\mathbb{E}N_1(\lambda))^2=\lambda=\mathbb{E}N_1^2(\lambda)-\lambda^2 \Rightarrow \mathbb{E}N_1^2(\lambda)=\lambda^2+\lambda$$

$$\mathbb{E}N^2(t)=\int_0^\infty \mathbb{E}N_1^2(\lambda)dP(\Lambda<\lambda)=\int_0^\infty(\lambda^2+\lambda)dP(\Lambda<\lambda)=\mathbb{E}\Lambda+\mathbb{E}\Lambda^2$$

$$\mathbb{D}N(t)=\mathbb{E}\Lambda+\mathbb{E}\Lambda^2-(\mathbb{E}\Lambda)^2=\mathbb{E}\Lambda+\mathbb{D}\Lambda$$

19-20] $N_1(t)$ - станд. пуас процесс
] Λ - полож сл. величина с конеч. вторым моментом, независимая от $N_1(t)$.

Выразить $\mathbb{D}\underbrace{N_1(\Lambda)}_{N}$ через моменты случ величина

Λ : $\mathbb{E}\Lambda = a$, $\mathbb{D}\Lambda = b$

$$\mathbb{E}N = \sum_{k=0}^{\infty} k P(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, d\underbrace{U(\lambda)}_{\text{распред } \Lambda} =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{\substack{\| \\ e^{-\lambda}\lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda}} dU(\lambda) = \int_0^{\infty} \lambda\, dU(\lambda) = \mathbb{E}\Lambda$$

$$\mathbb{D}N = \mathbb{E}N^2 - (\mathbb{E}N)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\, dU(\lambda) - (\mathbb{E}\Lambda)^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}\right)}_{\underbrace{\sum (k-1+1)\, \lambda^k / (k-1)!}_{\underbrace{e^{-\lambda}\lambda^2 \sum \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda \sum \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}}_{\lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}}}} dU(\lambda) - (\mathbb{E}\Lambda)^2 = \int_0^{\infty} (\lambda^2 + \lambda)\, dU(\lambda) -$$

$$- (\mathbb{E}\Lambda)^2 = \mathbb{E}\Lambda^2 + \mathbb{E}\Lambda - (\mathbb{E}\Lambda)^2 =$$

$$= \mathbb{D}\Lambda + \mathbb{E}\Lambda$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}N = a \qquad \mathbb{D}N = a + b.$$

Задача 21

Условие

Сколько респондентов надо опросить, чтобы определить рейтинг политического деятеля с точностью 0.1% и надежностью 0.95?

Решение

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - p\right| \le \epsilon$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| \le \epsilon\right) \ge \gamma$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum X_i - p\right| \le \epsilon\right) \ge \frac{1 - \mathbb{D}(\frac{1}{n}\sum X_i)}{\epsilon^2} = 1 - \frac{p(p-1)}{\epsilon^2 n} \ge \gamma$$

$$\frac{p(1-p)}{\epsilon^2 n} \le 1 - \gamma \Rightarrow n \ge \frac{p(1-p)}{\epsilon^2(1-\gamma)}$$

$$n \ge \frac{1}{4\epsilon^2(1-\gamma)}$$

В нашем случае $\epsilon = 0.001$ и $\gamma = 0.95$

Таким образом получаем

Ответ: 5'000'000